

## טורי פורייה והתמרות... גליון תרגילי בית מס' 2 20.04.01

הערה: כאשר אתם מתבקשים לשרטט גרף של פונקציה, ויש לפונקציה קפיצה בנקודה מסויימת, יש לציין את ערך הפונקציה גם בנקודת הקפיצה.

### 1. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} \cos x, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0, & \frac{\pi}{2} < |x| \leq \pi \end{cases}$$

- מצאו את טור פורייה ממשי  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$  של  $f$ .
- שרטטו את הגרף, לאורך כל ציר ה- $x$ , של סכום הטור שמצאתם. האם הטור הזה מתכנס במידה שווה?
- מצאו את ערך הסכום של הטור המספרי  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$ .
- נגדיר את הפונקציה  $g : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  כך ש  $g(x) = f'(x)$  בכל נקודה  $x \in [-\pi, \pi]$  שבה  $f'(x)$  קיימת. מצאו את טור פורייה הממשי של  $g$ .
- שרטטו את הגרף, לאורך כל ציר ה- $x$ , של סכום הטור שמצאתם עבור  $g$ . האם הטור הזה מתכנס במידה שווה?
- אם  $a_n$  הם המקדמים של  $\cos nx$  בטור שמצאתם בסעיף א', מצאו את הסכומים של שני הטורים המספריים  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} a_n$  ו  $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2$ .

### 2. עבור כל $n \in \mathbb{N}$ יהיו $a_n$ ו $b_n$ מקדמי פורייה הממשיים של הפונקציה $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ אשר מוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & -\pi \leq x < 0 \\ \pi^2 x^2, & 0 \leq x < 1 \\ \pi^2, & 1 \leq x \leq \pi \end{cases}$$

נגדיר את הפונקציה  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י הנוסחא

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-a_n \cdot n \cdot \sin nx + b_n \cdot n \cdot \cos nx) \quad (*)$$

כאשר  $a_n$  ו  $b_n$  מקדמי פורייה של  $f$ .

- רשמו נוסחא או נוסחאות עבור  $g(x)$  כאשר  $x \in [-\pi, \pi]$ .
- שרטטו את הגרף של  $g$  לאורך כל ציר ה- $x$ . (איך אנו יודעים שהטור  $(*)$  מתכנס?)

### 3. ידוע כי $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin nx}{n^3}$ בכל ציר ה- $x$ .

- הוכיחו כי  $f(x) = \frac{x^3 - \pi^2 x}{12}$  עבור כל  $x \in (-\pi, \pi)$ .
- שרטטו את הגרף של  $f$  לאורך כל ציר ה- $x$ .
- הוכיחו כי  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$ .

4. א. הוכיחו כי בקטע  $(0, \pi)$  קיים:

$$\sin 2x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-8}{\pi((2k-1)^2 - 4)} \cos(2k-1)x$$

ב. שרטטו את הגרף של הסכום של הטור הנמצא בסעיף א' לאורך כל ציר ה- $x$ . האם הטור מתכנס לסכומו במידה שווה ב  $\mathbb{R}$ ?

5. נתונה הפונקציה  $f(x) = x - \frac{\pi}{2}$  בקטע  $[0, \pi]$ .

א. מצאו טור קוסינוסים  $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$  עבור הפונקציה  $f$ .

ב. מצאו טור סינוסים  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$  עבור הפונקציה  $f$ .

ג. נגדיר את הפונקציה  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י  $g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ . רשמו נוסחא

וא נוסחאות עבור  $g(x)$  לכל  $x \in \mathbb{R}$ . שרטטו את הגרף של  $g$  לאורך כל ציר ה- $x$ . האם הטור הזה מתכנס ל  $g(x)$  במידה שווה ב  $\mathbb{R}$ ? נמקו.

ד. חשבו את סכומי הטורים  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$  ו  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ .

6. הפונקציה  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  מוגדרת ע"י

$$f(x) = \begin{cases} (x + \pi)^2, & -\pi \leq x \leq 0 \\ \pi^2 - \pi x, & 0 < x \leq \pi \end{cases}$$

מגדירים פונקציה שניה  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ע"י

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-na_n \sin nx + nb_n \cos nx)$$

כאשר  $a_n$  ו  $b_n$  הם מקדמי פורייה של  $f$ .

א. רשמו נוסחא או נוסחאות עבור  $g(x)$  עבור כל  $x \in [-\pi, \pi]$ .

ב. שרטטו את הגרף של  $g$  לאורך כל ציר ה- $x$ .

ג. מצאו את הערך של  $g(100)$ .

7. נתונה הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} c, & -\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x, & -\frac{\pi}{2} < x \leq \pi \end{cases}$$

א. בחרו קבוע  $c$  כך שיתקיים:  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$ .

ב. ללא חישוב טור פורייה של  $f$ , שרטטו את גרף פונקציית הסכום שלו לאורך כל ציר ה- $x$ .  
 ג. תהי  $F$  הפונקציה הקדומה של  $f$  בקטע  $[-\pi, \pi]$  המקיימת את  $F(0) = 0$ , כלומר  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ . רשמו נוסחאות עבור  $F(x)$  כאשר  $x \in [-\pi, \pi]$ . שרטטו את הגרף של  $F$  בקטע  $[-\pi, \pi]$ .  
 ד. תהי

$$x \in \mathbb{R} \quad H(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{a_n}{n} \sin nx - \frac{b_n}{n} \cos nx \right) \quad (1)$$

כאשר  $a_n$  ו  $b_n$  הם מקדמי פורייה של הפונקציה  $f$  המוגדרת לעיל, עבור  $c$  בהתאם לסעיף א'.  
 רשמו נוסחאות או נוסחאות עבור  $H(x)$  כאשר  $x \in [-\pi, \pi]$ . שרטטו את הגרף של  $H$  לאורך כל ציר ה- $x$ . האם הטור ב (1) מתכנס ל  $H(x)$  במידה שווה ב  $\mathbb{R}$ ? נמקו.

8. נתון שהפונקציה הרציפה  $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$  מקיימת את התנאי  $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$ . נתון שהפונקציה  $F(x) = C + \int_0^x f(t)dt$  מקיימת  $\int_{-\pi}^{\pi} F(x)dx = 1$ . מצאו טור מספרי שהאברים שלו תלויים במקדמי פורייה של  $f$ , וכך שסכום הטור שווה ל  $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 F(x)dx$ .